239 - Fonctions définies par une intégrale dépendant d'un paramètre. Exemples et applications.

Cadre : $(X, \mathcal{A}, \mu)$ est un espace mesuré, E un espace vectoriel normé et $f : E \times X \to \mathbb{C}$ une application.

I Étude de la régularité

1) Continuité

Théorème 1. *Soit $u_0 \in E$. On suppose que :*

(i) Pour tout $u \in E$, $x \mapsto f(u,x)$ est mesurable.

(ii) Pour presque tout $x \in X$, $u \mapsto f(u,x)$ est continue en u_0.

(iii) $\exists g \in L^1(X, \mathbb{R}^+), \forall u \in E, |f(u,x)| \leqslant g(x)$ p.p.

Alors $u \mapsto \int_X f(u,x)d\mu(x)$ est définie pour tout $u \in E$ et continue en u_0.

Corollaire 2. *On suppose que :*

(i) Pour tout $u \in E$, $x \mapsto f(u,x)$ est mesurable.

(ii) Pour presque tout $x \in X$, $u \mapsto f(u,x)$ est continue sur E.

(iii) $\forall K \subset E$ compact , $\exists g \in L^1(X, \mathbb{R}^+)$, $\forall u \in K, |f(u,x)| \leqslant g(x)$ p.p.

Alors $u \mapsto \int_X f(u,x)d\mu(x)$ est définie pour tout $u \in E$ et continue en u_0.

Exemple 3. *On pose, pour $x > 0$, $\Gamma(x) = \int_0^{+\infty} e^{-t}t^{x-1}dt$. Γ est bien définie et continue sur $\mathbb{R}^{+\star}$.*

Exemple 4. *Soit f définie sur $\mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}^+$ par $f(x,t) = xe^{-xt}$. La fonction $x \mapsto \int_0^\infty xe^{-xt}dt$ est bien définie, mais pas continue en 0.*

2) Dérivabilité

On suppose que E est un intervalle non vide de $\mathbb{R}$.

Théorème 5. *On suppose que :*

(i) Pour tout $u \in E$, $x \mapsto f(u,x)$ est μ-intégrable.

(ii) Pour presque tout $x \in X$, $u \mapsto f(u,x)$ est dérivable sur E.

(iii) $\exists g \in L^1(\mu), \forall u \in E, \left|\frac{\partial f}{\partial u}(u,x)\right| \leqslant g(x)$ p.p.

Alors $F(u) = \int_X f(u,x)d\mu(x)$ est définie pour tout $u \in E$ et dérivable sur E, de dérivée $F'(u) = \int_X \frac{\partial f}{\partial u}(u,x)d\mu(x)$.

Remarque 6. *Si $u \mapsto f(u,x)$ est $\mathcal{C}^1$ sur E, alors F aussi.*

Exemple 7. $\forall x \in \mathbb{R}^+$, $\displaystyle\int_0^\infty \frac{\sin(xt)}{t}e^{-t}dt = \arctan x$

Exemple 8. *Pour $(x,t) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}^+$, $f(x,t) = x^2e^{-t|x|}$, F est bien définie mais n'est pas dérivable.*

Théorème 9. *Soit $k \in \mathbb{N}$. On suppose que :*

(i) Pour tout $u \in E$, $x \mapsto f(u,x)$ est μ-intégrable.

(ii) Pour presque tout $x \in X$, $u \mapsto f(u,x)$ est $\mathcal{C}^k$ sur E.

(iii) Pour tout $j \in [\![1,k]\!]$, et tout $K \subset E$ compact, il existe $g \in L^1(X, \mathbb{R}^+)$, tel que pour tout $u \in K$, $|\frac{\partial^j f}{\partial t^j}(u,x)| \leqslant g(x)$ p.p.

Alors $F(u) = \int_X f(u,x)d\mu(x)$ est définie pour tout $u \in E$ et $\mathcal{C}^k$ sur E, avec $F^{(j)}(u) = \int_X \frac{\partial^j f}{\partial u^j}(u,x)d\mu(x)$ pour tout $j \in [\![1,k]\!]$.

Exemple 10. *La fonction Γ est de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}^{+\star}$.*

3) Holomorphie

Théorème 11. *Soient $(X, \mathcal{T}, \mu)$ un espace mesuré et $f : \Omega \times X \to \mathbb{C}$. Posons pour tout $z \in \Omega$ $F(z) = \int_X f(z,x)d\mu(x)$, et supposons que :*

(i) $\forall z \in \Omega$, $x \mapsto f(z,x)$ est mesurable

(ii) $\forall x \in X$, $z \mapsto f(z,x)$ est holomorphe

(iii) Pour tout compact K de Ω, il existe $g \in L^1(X)$ telle que pour tous $z \in K$ et $x \in X$, $|f(z,x)| \leqslant g(x)$

Alors F est holomorphe et pour tous $z \in \Omega$ et $n \in \mathbb{N}$:

$$F^{(n)}(z) = \int_X \frac{\partial^n f}{\partial z^n}(z,x)d\mu(x)$$

Proposition 12. *Soit $P = \left\{z \in \mathbb{C} \,\middle|\, \mathrm{Re}(z) > 0\right\}$. On définit sur P la fonction holomorphe :*

$$\Gamma(z) = \int_0^{+\infty} e^{-t}t^{z-1}dt$$

Théorème 13. *Soit $\sum f_n$ une série de fonctions méromorphes sur Ω. On suppose que cette série converge uniformément (resp. normalement) sur tout compact de Ω, alors :*

(i) La somme f de cette série est méromorphe sur Ω.

(ii) La série $\sum f_n^{(k)}$ converge uniformément (resp. normalement) sur tout compact de Ω et sa somme est $f^{(k)}$.

Proposition 14. *Γ se prolonge en une fonction méromorphe sur $\mathbb{C}$.*

II Produit de convolution

1) Définition et premières propriétés

Définition 15. Soient $f, g : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$. Quand ceci a un sens, on pose :

$$(f * g)(x) = \int_{\mathbb{R}^n} f(t)g(x-t)\,dt$$

le produit de convolution de f et g en $x \in \mathbb{R}^n$.

Remarque 16. *Si f et g sont positives, $f * g$ est toujours définie, à valeurs dans $\overline{\mathbb{R}^+}$.*

Proposition 17. *La convolution entre fonctions mesurables positives est commutative et associative.*

Exemple 18. *Soit $f \in L^1(\mathbb{R}^n)$ positive, alors $f * 0 = 0$ et $f * \mathbb{1}_{\mathbb{R}^n} = \int_{\mathbb{R}^n} f$.*

Proposition 19. *Soit $f \in L^1_{loc}(\mathbb{R}^n)$ à support compact. Alors $f * g$ est bien définie sur $\mathbb{R}^n$.*

Théorème 20. *Soient $p, q \in [1, +\infty]$ tels que $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$, $f \in L^p(\mathbb{R}^n)$ et $g \in L^q(\mathbb{R}^n)$. Alors $f * g$ est bien définie sur $\mathbb{R}^n$, uniformément continue, et bornée par $\|f\|_p \|g\|_q$. De plus, si $1 < p, q < +\infty$, alors $\lim\limits_{\|x\| \to \infty} (f * g)(x) = 0$.*

Théorème 21. *$(L^1(\mathbb{R}^n), +, \cdot, *)$ est une $\mathbb{R}$-algèbre commutative.*

Théorème 22. *Soient $f \in L^1(\mathbb{R}^n)$ et $g \in \mathcal{C}^k_c(\mathbb{R}^n)$, alors $(f * g) \in \mathcal{C}^k_c(\mathbb{R}^n)$, et $D(f * g) = f * D(g)$, où D est un opérateur différentiel.*

2) Approximations de l'unité

Définition 23. Une suite $(\rho_n)_{n \geqslant 1}$ d'éléments de $L^1(\mathbb{R}^d)$ est une approximation de l'unité si elle vérifie :

(i) $\forall n \geqslant 1,\ \int_{\mathbb{R}^d} \rho_n = 1$

(ii) $\sup\limits_{n \geqslant 1} \int_{\mathbb{R}^d} |\rho_n| < +\infty$

(iii) $\forall \varepsilon > 0,\ \int_{\{|x| > \varepsilon\}]} \rho_n \xrightarrow[n \to +\infty]{} 0$

Exemple 24. *Soit $\rho \in L^1(\mathbb{R}^d)$ telle que $\int_{\mathbb{R}^d} \rho = 1$, alors $\rho_n : x \mapsto n\rho(nx)$ est une approximation de l'identité.*

Théorème 25. *Soit $(\rho_n)_n$ une approximation de l'identité.*

(i) Si $f \in L^\infty(\mathbb{R}^d)$ est continue en x, alors $\lim\limits_{n \to +\infty} (\rho_n * f)(x) = f(x)$.

(ii) Si $f \in L^\infty(\mathbb{R}^d)$ est uniformément continue sur $\mathbb{R}^d$, alors $\lim\limits_{n \to +\infty} (\rho_n * f) = f$ dans $L^\infty(\mathbb{R}^d)$.

(iii) Si $f \in L^p(\mathbb{R}^d)$ ($p \in [1, +\infty[$), alors $\lim\limits_{n \to +\infty} (\rho_n * f) = f$ dans $L^p(\mathbb{R}^d)$.

Théorème 26. *Pour tout $p \in [1, +\infty[$, $\mathcal{C}^\infty_c(\mathbb{R}^d)$ est dense dans $L^p(\mathbb{R}^d)$.*

Exemple 27. *On pose $\mathbb{T} = \mathbb{R}/\mathbb{Z}$ et $F_n : x \mapsto \frac{1}{n+1} \sum\limits_{k=0}^{n} \frac{\sin(2\pi(k+1)x)}{\sin(\pi x)}$ le noyau de Fejer. Il s'agit d'une approximation de l'unité.*

Théorème 28. *Si f est continue et 1-périodique, $f * F_n$ converge uniformément vers f.*

III Transformée de Fourier

Définition 29. Soit $f \in L^1(\mathbb{R}^d)$. Sa transformée de Fourier $\hat{f}$ est :

$$\hat{f} : \left| \begin{array}{ccc} \mathbb{R}^d & \longrightarrow & \mathbb{R}^d \\ \xi & \longmapsto & \displaystyle\int_{\mathbb{R}^d} f(x) e^{-i\,\langle\, x\,,\,\xi\,\rangle}\,dx \end{array} \right.$$

Proposition 30. *Si $f \in L^1(\mathbb{R}^d)$, $\hat{f}$ est une fonction continue qui tend vers 0 à l'infini.*

Proposition 31. *Si $||x||^k f(x) \in L^1(\mathbb{R}^d)$, alors $\hat{f} \in \mathcal{C}^k(\mathbb{R}^d)$ et pour tout $\alpha \in \mathbb{N}^d$ tel que $|\alpha| \leqslant k$, $\partial^\alpha \hat{f} = \widehat{(-ix)^\alpha} f$.*

Proposition 32. *Soit $f \in \mathcal{C}^k(\mathbb{R}^d)$ dont les dérivées jusqu'à l'ordre k sont dans $L^1(\mathbb{R}^d)$. Alors, pour tout $\alpha \in \mathbb{N}^d$ tel que $|\alpha| \leqslant k$, $\widehat{\partial^\alpha f} = (i\xi)^\alpha \hat{f}$.*

Théorème 33. *Soit $f \in L^1(\mathbb{R}^d)$ telle que $\hat{f} \in L^1(\mathbb{R}^d)$. Alors $\hat{\hat{f}} = (2\pi)^d \check{f}$.*

Exemple 34. *Soit $a > 0$, et $\mathbb{1}_{[-a,a]} \in L^1(\mathbb{R}^d)$, mais sa transformée de Fourier n'est pas dans $L^1(\mathbb{R}^d)$.*

Application 35. *Soient I un intervalle de $\mathbb{R}$ et ρ une fonction poids. S'il existe $a > 0$ tel que $\int_I e^{a|x|}\rho(x)dx < \infty$, alors les polynômes orthogonaux associés à ρ forment une base hilbertienne de $L^2(I, \rho)$.*

Définition 36. Soit X un vecteur aléatoire sur $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$, à valeurs dans $\mathbb{R}^d$. On définit la fonction caractéristique de X par :

$$\varphi : \left| \begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{C} \\ t & \longmapsto & \mathbb{E}\left[e^{i\langle t, X\rangle}\right] = \displaystyle\int_{\mathbb{R}^d} e^{i\langle t, X\rangle} d\mathbb{P}_X(x) \end{array} \right.$$

Remarque 37. *Si $\mathbb{P}_X$ est à densité f, alors $\varphi_X(t) = \check{\hat{f}}(t)$.*

Théorème 38. *La fonction caractéristique φ_X caractérise la loi de X.*

Développements

— Fonction Gamma (12,14) [Les]
— Densité des polynômes orthogonaux (35) [BMP]

Références

[QZ] Hervé Queffélec and Claude Zuily. *Analyse pour l'agrégation.* Dunod
[Gou] Xavier Gourdon. *Les Maths en Tête : Analyse.* Ellipses
[BMP] Vincent Beck, Jérôme Malick, and Gabriel Peyré. *Objectif Agrégation*
[Les] Ahmed Lesfari. *Variables complexes.* Ellipses